单元 A6： 多项式及方程

特定目标：

1. 学习单变量的实系数多项式的性质。
2. 学习除法算式、余式定理和欧几里德算法与及它们的应用。
3. 分解有理函数为分项分式。
4. 学习单变量的实系数多项式方程的根的性质。

内容	时间分配	教学建议
6.1 单变量的实系数多项式	5	学生应学习单变量的实系数多项式的一般式和下列各项名称：非零多项式的次、首项系数、常数项、首一多项式、零多项式。 学生亦应学习两多项式的等式、和、差及积。 由定义可知，对非零多项式 f(x)、 g(x) deg {f(x) g(x)} = deg f(x) + deg g(x) 和deg {f(x) + g(x)} ≤ max {deg f(x)，deg g(x)}。 应定义两非零多项式的最高公因式 (G.C.D. 或 H.C.F.)。
6.2 有 理 函 数	4	学生应清楚除法算式和欧几里德算法的分别。由除法算式可证明余式定理，因学生在中学时已学习余式定理，固教师可给予较深的题目。欧几里德算法是求两多项式的最高公因式的一种方法，教师应给予学生练习一些求两多项式的最高公因式的题目。. 应首先定义有理函数。学生可能初次接触分项分式，教师可引用一简单例子，如 $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$。 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x+1}$ 称为分项分式。 教师应清楚说明分解真有理函数为分项分式的法则，并举例说明。应举例强调及说明，若一有理函数为假有理函数时，应先将它表为一多项式及真有理函数的和。

内容	时间分配	教学建议
		学生应学习分项分式的应用。 *例*： 1. 表 $\frac{x^2-8x+9}{(x+1)(x-2)^3}$ 为分项分式。 2. 分解 $\frac{x^4}{(x-a)(x^2+a^2)}$ 为分项分式。 3. 计算 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$ 的值。
6.3 单变量的实系数多项式方程	6	对于二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 与及它的根α、β，学生应熟悉下列关系： $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$， $\alpha\beta=\frac{c}{a}$。 对一般 n 次多项式方程， $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ 或 $\sum_{k=0}^{n}a^kx^k=0$， 下列定理给出系数与根的关系： 若 α_1，α_2，…，α_n 为多项式方程 f(x) = 0 的根，则一切可能的 k 个根α_j (k = 1，2，. . .，n) 的乘积的和 S_k 等于 $(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$， 即是，如 $f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ 则 $S_1=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ $S_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$ $S_3=\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$

内容	时间分配	教学建议
		…… …… $S_n = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$。 学生应仔细学习下列性质： (i) 非零多项式的相异根的数目小于或等于多项式的次。 (ii) 若一个整数系数多项式方程的根为有理数 $\frac{p}{q}$，其 p 和 q 是互素的整数，则 p 整除多项式的常数项，而 q 整除多项式的首项系数。 (iii) 多重根的条件： $x = \alpha$ 是多项式方程 $f(x) = 0$ 的多重根的充要条件是 $f(\alpha) = 0$，且 α 是方程 $f'(x) = 0$ 的根，其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数。 以下是较为一般的形式： 对于正整数 k，α 是方程 $f(x) = 0$ 的 $k + 1$ 重数根当且仅当 $f(\alpha) = 0$ ， 并且 α 为 $f'(x) = 0$ 的 k 重数根。 和 α 为方程 $f(x) = 0$ 的 k+1 重数根当且仅当 α 为下列方程公根： $f(x) = 0$， $f'(x) = 0$， $\vdots$ $f^{(k)}(x) = 0$ 但 α 不是 $f^{(k+1)}(x) = 0$ 的根。 注：以共轭偶出现的复数根会在单元 A10 复数中学习。
	15	